
Inhaltsübersicht:

Robert Krell

Stochastik in der SII
Vorwort zu den folgenden Beiträgen

In den folgenden Artikeln stelle ich einige Arbeitsblätter und Erfahrungen aus meinem jetzt kurz vorm Abitur stehenden Mathematik-Grundkurs vor. Die Artikel wurden für die Veröffentlichung im MUED-Rundbrief Nr. 126 (2/99) verfasst und hier in leicht überarbeiteter Form vorgestellt. Tatsächlich kann und soll hier keine vollständige Kursbeschreibung oder gar eine Einführung in die Stochastik erfolgen – dafür muss auf die Literatur oder auf MUED-Materialien verwiesen werden.

Die MUED ist übrigens ein Verein engagierter Mathematik-Lehrerinnen und

-Lehrer aller Bundesländer und Schulformen, deren Ziel es ist, beziehungshaltigen, realitätsnahen Unterricht zu gestalten und ihre Arbeitsmaterialen untereinander auszutauschen. So können von Mitgliedern bei der MUED-Zentrale „MUED e.V., Bahnhofstr. 72, 48301 Appelhülsen“ viele Hunderte von Unterrichteinheiten entliehen werden. Dort gibt's auch weitere Informationen für Interessenten bzw. (gegen Gebühr) Kataloge, Rundbriefe, usw. Der Verein ist im Internet mit der Seite http://www.mued.de vertreten; e-Mail: mued.ev@t-online.de.

Mein Ziel hier ist es, einige Aufgaben vorzustellen, die leicht so oder in abgewandelter Form den eigenen Unterricht übernommen werden können oder die zumindest Anregungen für den eigenen Unterricht bieten könnten -- auch wenn ich mit "erfundenen Zahlen" hinter dem MUED-Ideal zurück bleibe, durch geeignete reale Beispiele außer Mathematik gleichzeitig auch Wissen über Lebenszusammenhänge zu vermitteln und am besten noch verantwortliches Schülerhandeln zu fördern. Trotzdem regten manche Themen und Aufgaben zu Gesprächen an, die weit über die Mathematik hinausgingen.

Die Aufgaben stammen, wie man an den Originaldaten sehen kann, aus den Halbjahren 12/II und 13/I. In diesen beiden Halbjahren wird bei uns im Grundkurs immer Stochastik unterrichtet, weil dieses mathematische Gebiet gerade für die Grundkursabsolventen weit relevanter ist als z.B. die Lineare Algebra -- was auch Rückmeldungen ehemaliger Schülerinnen und Schüler immer wieder bestätigen. Allerdings stehen leider für die Zukunft Änderungen ins Haus, wie man an den neuen Lehrpläne für die gymnasiale Oberstufe in Nordrhein-Westfalen ablesen kann (waren die Entwürfe noch im Internet kostenlos einsehbar, so sind sie seit Juni '99 entfernt: jetzt soll man die inzwischen verabschiedeten Richtlinien beim Verlag kaufen).

Anschrift des Verfassers:

R. Krell
Lotte-Wicke-Weg 12
40627 Düsseldorf

Homepage: http://www.r-krell.de
e-Mail: mail@r-krell.de oder krell@web.de

Über Rückmeldungen und Kommentare (schriftl. oder per e-mail) freue ich mich!

4.5.'98 Mathematik M12$_1$ (Krell)

Zählverfahren:
<u>Ziehen ohne Zurücklegen, Reihenfolge unwichtig ("Lottoformel").</u>

In einer Urne (Lottotrommel) sind vier Kugeln, beschriftet mit "eins" bis "vier". Drei Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen.

a) Wie viele Pfade sind im Baum eingezeichnet? Welchen Versuchsbedingungen entspricht das?

b) Wie viele ‚echte' Pfade enthält nebenstehender Baum? Welche Versuchsbedingungen führen zu dieser Anzahl?

Die Ziehungsreihenfolge soll egal sein, sodass z.B. die Ziehungen (eins, vier, zwei) und (vier, zwei, eins) als identisch gelten.

c) Wie viele Tupel sind dann jeweils gleich?

d) Notiere die Menge aller möglichen Ergebnisse in der Form $\Omega = \{\{eins, zwei, drei\}, \{.., .., ..\}, .. , \{..,..,..\}\}$. Wie viele Ergebnisse sind es?

e) Liefert unsere Lottoformel die gleiche Anzahl wie in d)?

```
                             ┌ – – – eins
            ┌ – 0 – eins┤ – – – zwei
            │                ├ – – – drei
            │                └ – – – vier
            │                ┌ – 0 – eins
┌—1/4—eins┼—1/3—zwei┤ – 0 – zwei
│           │                ├—1/2—drei
│           │                └—1/2—vier
│           │                ┌ – 0 – eins
│           ├—1/3—drei┼—1/2—zwei
│           │                ├ – 0 – drei
│           │                └—1/2—vier
│           │                ┌ – 0 – eins
│           └—1/3—vier┼—1/2—zwei
│                            ├—1/2—drei
│                            └ – 0 – vier
│                            ┌ – 0 – eins
│           ┌—1/3—eins┤ – 0 – zwei
│           │                ├—1/2—drei
│           │                └—1/2—vier
│           │                ┌ – – – eins
├—1/4—zwei┤ – 0 – zwei┤ – – – zwei
│           │                ├ – – – drei
│           │                └ – – – vier
│           │                ┌—1/2—eins
│           ├—1/3—drei┤ – 0 – zwei
│           │                ├ – 0 – drei
│           │                └—1/2—vier
│           │                ┌—1/2—eins
│           └—1/3—vier┤ – 0 – zwei
│                            ├—1/2—drei
│                            └ – 0 – vier
│                            ┌ – 0 – eins
│           ┌—1/3—eins┼—1/2—zwei
│           │                ├ – 0 – drei
│           │                └—1/2—vier
│           │                ┌—1/2—eins
├—1/4—drei┼—1/3—zwei┤ – 0 – zwei
│           │                ├ – 0 – drei
│           │                └—1/2—vier
│           │                ┌ – – – eins
│           ├ – 0 – drei┤ – – – zwei
│           │                ├ – – – drei
│           │                └ – – – vier
│           │                ┌—1/2—eins
│           └—1/3—vier┼—1/2—zwei
│                            ├ – 0 – drei
│                            └ – 0 – vier
│                            ┌ – 0 – eins
│           ┌—1/3—eins┼—1/2—zwei
│           │                ├—1/2—drei
│           │                └ – 0 – vier
│           │                ┌—1/2—eins
└—1/4—vier┼—1/3—zwei┤ – 0 – zwei
            │                ├—1/2—drei
            │                └ – 0 – vier
            │                ┌—1/2—eins
            ├—1/3—drei┼—1/2—zwei
            │                ├ – 0 – drei
            │                └ – 0 – vier
            │                ┌ – – – eins
            └ – 0 – vier┤ – – – zwei
                             ├ – – – drei
                             └ – – – vier
```

Robert Krell

Zählverfahren der Kombinatorik

Um rasch zur interessanteren Beurteilenden Statistik zu kommen, behandele ich die Kombinatorik möglichst kurz. Umso wichtiger erscheint mir konsequente Veranschaulichung. Dazu dienen mir immer wieder die zuvor eingeführten (oder wiederholten) Baumdiagramme. Im nachstehenden Arbeitsblatt werden gegen Ende der Kombinatorik die Zusammenhänge zwischen den drei eingeführten Zählverfahren wiederholt und verdeutlicht. In den Lösungen habe ich auch auf die offenbar von vielen Kolleginnen und Kollegen noch wenig genutzten Taschenrechnerfunktionen zum Thema hingewiesen.

<u>Aufgaben:</u> siehe oben, Blatt vom 4.5.98

<u>Lösungen:</u>

a) Gezeichnet (z.T. gestrichelt) sind $|\Omega_a| = n^k = 4^3 = 64$ Pfade. Dies ist die Anzahl für einen dreistufigen Versuch mit vier Kugeln, Ziehen <u>mit</u> Zurücklegen, bei dem die Ziehungsreihenfolge wichtig ist (k=3, n=4). Zum Potenzieren gibt‘s auf dem Taschenrechner bekanntlich die $\boxed{x^y}$-Taste.

b) Echte Pfade (nicht gestrichelt, also mit Pfad-Wkt. > 0) sind nur $|\Omega_b| = 4\cdot3\cdot2 =$ 24 Pfade: Ziehen <u>ohne</u> Zurücklegen, Reihenfolge wichtig.
(Allgemeine Formel $|\Omega| = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$; auf dem Taschenrechner als Taste $\boxed{\text{nPr}}$ vorhanden, die nach der Eingabe von n und vor dem Eintippen von k gedrückt werden muss).

c) Je $k! = 3! = 6$ Tupel enthalten die gleichen Zahlen, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, z.B. (eins, zwei, drei) = (eins, drei, zwei) = (drei, eins, zwei) = (zwei, eins, drei) = (zwei, drei, eins) = (eins, drei, zwei), die bei unwichtiger Reihenfolge zu dem einen Ereignis {eins, zwei, drei} zusammengefasst werden. Die Fakultätstaste $\boxed{x!}$ ist i.a. bekannt!

d) Damit gibt es dann nur 24 : 6 = 4 verschiedene Lösungen, nämlich $\Omega_{c,d}$ = {{eins, zwei, drei}, {eins, zwei, vier}, {eins, drei, vier} , {zwei, drei, vier}}.

e) Ja, auch die Lottoformel liefert $|\Omega| = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{4!}{3!\cdot1!} = \frac{24}{6\cdot1} = 4$.
Die Lottoformel gibt‘s auf dem Taschenrechner als $\boxed{\text{nCr}}$, was gleichzeitig der Binomialkoeffizient "n über r" bzw. "n über k" ist.

<u>Anmerkungen:</u>

s. nächste Seite

Anmerkungen:

Die oben genannten Tasten gelten für viele wissenschaftliche Taschenrechner, insbesondere für die Geräte von Casio.
In Tabellenkalkulationsprogrammen -- z.B. in Excel 5.0 -- gibt's für die Möglichkeits-Anzahlen $|\Omega|$ der verschiedenen Versuche ebenfalls passende Funktionen:

a) `=n^k` zum Potenzieren,

b) `=Variationen(n;k)` für $\frac{n!}{(n-k)!}$

und

e) `=Kombinationen(n;k)` für $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ (Lottoformel)

wobei an Stelle von *n* und *k* allerdings entweder konkrete Zahlen angegeben oder Zellbezüge zu konkreten Zahlen hergestellt werden müssen. Mehr zum Einsatz von Excel im Stochastik-Unterricht findet sich außerdem im Beitrag „Von der Binomial- zur Normalverteilung" weiter hinten in diesem Heft bzw. in dieser Zusammenstellung!.
Der im Arbeitsblatt gezeichnete Baum wurde mit der Software "WktBaum" angefertigt, die auch Pfad- und Ereigniswahrscheinlichkeiten ausgibt. "WktBaum" ist beispielsweise von http://members.tripod.de/r_krell im Internet erhältlich.

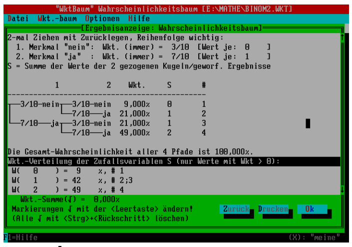
Robert Krell

Binomial-Verteilung

```
                  "WktBaum" Wahrscheinlichkeitsbaum  (C) R. Krell            *
 Datei  Wkt.-baum  Optionen  Hilfe
╔═══════════════════[Ergebnisanzeige: Wahrscheinlichkeitsbaum]══════════════╗
 2-mal Ziehen mit Zurücklegen, Reihenfolge wichtig:
   1. Merkmal "nein":  Wkt. (immer) =  3/10  [Wert je:  0    ]
   2. Merkmal "ja"  :  Wkt. (immer) =  7/10  [Wert je:  1    ]
 S = Summe der Werte der 2 gezogenen Kugeln/geworf. Ergebnisse

             1            2     Wkt.      S        #
 -----------------------------------------------
 ┌──3/10─nein┬──3/10─nein   9,000%    0        1
 │           └──7/10───ja  21,000%    1        2
 └──7/10───ja┬──3/10─nein  21,000%    1        3
             └──7/10───ja  49,000%    2        4

 Die Gesamt-Wahrscheinlichkeit aller 4 Pfade ist 100,000%.
 Wkt.-Verteilung der Zufallsvariablen S (nur Werte mit Wkt > 0):
  W(   0    ) =  9     %, # 1
  W(   1    ) = 42     %, # 2;3
  W(   2    ) = 49     %, # 4
    Wkt.-Summe(¹) =   0,000%
  Markierungen ¹ mit der <Leertaste> ändern!         Z        D         Ok
  (Alle ¹ mit <Strg>+<Rückschritt> löschen)
╚═══════════════════════════════════════════════════════════════════════════╝
F1=Hilfe                                                       (X): "meine"
```



Ein mehrstufiger Zufallsversuch, bei dem es auf jeder Stufe immer genau zwei verschiedene Möglichkeiten gibt ("Treffer" und "Niete", bzw. oben im Bildschirmabdruck "ja" und "nein"), und wo auf allen Stufen die Wahrscheinlichkeit (Wkt.) p für einen Treffer gleich ist -- womit auch die Wkt. $q = 1 - p$ für eine Niete auf jeder Stufe konstant ist -- heißt Bernoulli-Versuch.

Ein Beispiel für einen Bernoulli-Versuch wäre z.B. das n-fache Ziehen aus eine Lottotrommel (‚Urne'), in der nur Kugeln zweier verschiedener Sorten liegen. Beispielsweise könnte es entweder nur rote und grüne Kugeln oder nur solche mit "ja"- oder "nein"-Aufschrift geben. Nach jeder Ziehung müsste die gerade gezogene Kugel wieder reingeworfen werden (‚mit Zurücklegen'), damit auch bei der nächsten Ziehung die Wahrscheinlichkeit wieder die gleiche ist, entweder eine der mit "ja" oder der mit "nein" beschrifteten Kugeln zu ergattern. Die Wahrscheinlichkeit p, bei der nächsten Ziehung zufällig eine "ja"-Kugel zu erhalten, ergibt sich aus dem Anteil der "ja"-Kugeln in der Urne. Entsprechend ist q der Anteil der zweiten, mit "nein" beschrifteten Kugelsorte, und damit auch die Wkt., eine solche Kugel bei der nächsten Ziehung zufällig zu erhaschen.

Anders als bei den Zählverfahren im vorangehenden Artikel bezeichnet man jetzt mit k nicht mehr die Zahl der Ziehungen, sondern die Zahl der Treffer (bzw. der insgesamt bei allen Ziehungen erhaltenen "ja"-Kugeln). Die Zahl der Ziehungen (‚Stufen') wird jetzt mit n bezeichnet, während früher damit die Zahl der vorhandenen Kugeln abgekürzt wurde. Diese praktisch in allen Büchern übliche Bezeichnungsverschiebung führt bei Schülerinnen und Schülern verständlicherweise immer wieder zu Problemen.
Alle Äste (‚Pfade') im Baum, die bei n Stufen genau k Treffer (bzw. genau k "ja"-Kugeln) liefern, haben jeweils die Wkt. $p^k \cdot q^{n-k}$ (Pfadregel und Kommutativgesetz!). Wie man leicht sieht -- und wie man meiner Meinung nach auch zunächst unbedingt anschaulich an Bäumen für n=2,

3 und 4 im Unterricht klar machen sollte -- gibt es immer $\binom{n}{k}$ Äste mit k Treffern. Also ist die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer bei n Ziehungen gleich

$$B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} .$$

Tabelliert man diese Wahrscheinlichkeiten *B(n;p;k)* für alle k von 0 bis n, so bezeichnet man die entstehende Wkt.-Verteilung wegen des in der Formel auftretenden Binomialkoeffizienten als Binomial-Verteilung. Beim in schwarz-weiß nur unvollkommen wiedergegebenen Bildschirm-abruck auf der vorigen Seite ist n=2, p=0,7 und q=0,3. Im nachfolgenden Kasten ist n=3, p=0,4

```
Programm "WktBaum"
3-mal Ziehen mit Zurücklegen, Reihenfolge wichtig:
  1. Merkmal "nein":  Wkt. (immer) =  6/10  [Wert je:  0  ]
  2. Merkmal "ja"  :  Wkt. (immer) =  4/10  [Wert je:  1  ]
k = Summe der Werte = Anzahl der "ja"-Kugeln bei 3 gezogenen

             1            2            3    Wkt.      k       #
------------------------------------------------------------------
┬──6/10─nein┬──6/10─nein┬──6/10─nein  21,600%    0        1
│           │           └──4/10───ja  14,400%    1        2
│           └──4/10───ja┬──6/10─nein  14,400%    1        3
│                       └──4/10───ja   9,600%    2        4
└──4/10───ja┬──6/10─nein┬──6/10─nein  14,400%    1        5
            │           └──4/10───ja   9,600%    2        6
            └──4/10───ja┬──6/10─nein   9,600%    2        7
                        └──4/10───ja   6,400%    3        8

Die Gesamt-Wahrscheinlichkeit aller 8 Pfade ist 100,000%.

Wkt.-Verteilung der Zufallsvariablen k
 W(  0  ) = 21,6 %, Pfad  # 1         (1 Pfad : 3 über 0)
 W(  1  ) = 43,2 %, Pfade # 2;3;5     (3 Pfade: 3 über 1)
 W(  2  ) = 28,8 %, Pfade # 4;6;7     (3 Pfade: 3 über 2)
```

und q=0,6. Die Wktn. *B(n;p;k)* sind als W(k) angezeigt.

Weil häufig die Gesamt-Wahrscheinlichkeit für mehrere, nebeneinander liegende Trefferzahlen k_1 bis k_2 benötigt werden, werden auch die kumulierten Wahrscheinlichkeiten *B(n;p;0..k)* tabelliert. $B(n;p;k_1..k_2)$ kann man dann als $B(n;p;k_1..k_2) = B(n;p;0..k_2) - B(n;p;0..k_1\text{-}1)$ ausrechnen. Solche *B(n;p;0..k)*-Summentabellen benutzt man z.B. beim Hypothesentest. Sofern im Schulbuch keine passende Tabelle abgedruckt ist, kann sie auch leicht mit dem Computer und einem üblichen Tabellenkalkulationsprogramm erstellt werden. Oder man verwendet später als Näherung die Normalverteilung und transformiert nach de Moivre und Laplace auf die Binomialverteilung.

Robert Krell

Macht Mathematik depressiv?

Die Schülerinnen und Schüler erhielten das eigentlich für eine Partnerarbeitsphase vorgesehene Blatt vom 10.9.98 (siehe nächste Seite) wegen Verzögerungen im Stundenablauf erst kurz vor Stundenende, um es als Hausaufgabe zu bearbeiten. Die Überschrift regte allerdings zum sofortigen Lesen an, wobei sie sich auch vom Gong nicht stören ließen.

Anmerkung

Mit diesem frei erfundenen Beispiel soll das Krankheitsbild der Depression keinesfalls verharmlost werden. Tatsächlich gab es in meinem Unterricht auch keine diesbezüglichen Äußerungen, Lacher, Verkürzungen wie "Depris" o.ä., sonst wäre ich eingeschritten.
In den USA schätzt man die Zahl derer, die irgendwann im Leben eine schwere depressive Phase durchgemacht haben, auf 8 bis 16 % -- Frauen sind fast doppelt so stark betroffen wie Männer (*Spektrum der Wissenschaft*, August 1998, Seiten 74-82; Zahlen S. 76).

<u>Lösung</u>

a) <u>Insgesamt ist von drei verschiedenen Prozentsätzen die Rede. Welchen?</u>

(0) 25% der Gesamtbevölkerung ("jeder Vierte") haben irgendwann Depressionen. (1) Prof. Glaublich vermutet, dass 30% der Mathe-Gebildeten depressiv werden. (2) Die Lehrerinnen behaupten, 20% der Mathe-Gebildeten werden depressiv.

b) <u>Notiere die Hypothesen des Professors und der Lehrerinnen!</u>

Es liegt zunächst nahe, die Thesen "positiv" zu formulieren, sodass H_1 und H_2 die Behauptungen der beiden Parteien direkt wiedergeben -- vgl. aber später noch f)!
(1) Der Professor erwartet mehr Depressive als normal. Selbst wenn in Wirklichkeit sogar über 30% der Mathe-Gebildeten depressiv wären, wäre die Behauptung des Professors die Beste. Deswegen wird einseitig getestet: für die These H_1 von Glaublich spricht $p \geq 0{,}3$, d.h. ein Anteil von *mindestens* 30% Depressiven an den Mathematiker(inne)n.
(2) Umgekehrt gilt die Aussage H_2 der Lehrerinnen besonders für wirkliche $p \leq 0{,}2$, also *höchstens* 20% depressive Mathe-Gebildete.

Do., 10.9.'98 Mathematik-Grundkurs $M13_1$ (Krell)

Hypothesentest

Nebenstehende Zeitungsmeldung hat in letzter Zeit für Aufsehen an den Gymnasien des Landes gesorgt. Lies den Text sorgfältig und bearbeite dazu folgende Aufgaben:

Macht Mathe depressiv?

Düsseldorf *(Eigener Bericht)* Nach Angaben der statistischen Abteilung des Landeskrankenhauses wird jeder vierte Bundesbürger irgendwann einmal in seinem Leben von Depressionen heimgesucht bzw. hat an Depressionen gelitten.

Auf einen möglichen Zusammenhang zwischen Depressionen und Mathematikunterricht wies jetzt Prof. U.N. Glaublich, Grafenberg, hin. Nach seinen Untersuchungen ist der Anteil der von Depressionen Geplagten unter Personen mit höherer Mathematik-Schulbildung mit 30% erkennbar größer als in der Normalbevölkerung. Prof. Glaublich vermutet die starken Anforderungen der Mathematik an das Denkvermögen als Ursache für spätere psychische Niedergeschlagenheit und Ohnmachtsgefühle.

Der Verband der Mathematiklehrerinnen des Rheinlandes weist Glaublichs These in einer ersten Stellungnahme jedoch entschieden zurück. Nach Verbandsumfragen würden von Leuten mit guten Mathematik-Kenntnissen nur 20% im Laufe ihres Lebens irgendwann einmal depressiv. Damit, so die Mathematiklehrerinnen, fördere der Mathematikunterricht nicht nur den Intellekt, sondern auch das Wohlbefinden der Menschen und diene letztlich der Volksgesundheit. *-rk*

a) Insgesamt ist von drei verschiedenen Prozentsätzen die Rede. Welchen?
b) Notiere die Hypothesen des Professors und der Lehrerinnen!
c) Weil sich die Behauptungen der beiden Parteien widersprechen, sollen ihre Hypothesen überprüft, d.h. an n=50 Personen getestet werden. Notiere für beide Hypothesen die Entscheidungsregel, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit α höchstens 5% (Risiko 1. Art) betragen soll.
d) Einer Kommission unabhängiger Ärzte ist es tatsächlich gelungen, in den Altenheimen der Stadt 50 Personen ausfindig zu machen, die früher eine höhere Schulbildung in Mathematik erhalten hatten. Durch Befragen und Einsicht in ihre Krankenakten wurde ermittelt, dass elf von ihnen schon einmal depressiv gewesen sind. Als dieses Ergebnis den beiden Streit-Parteien zugeleitet wird, hört man aus beiden Lagern Jubel! Begründe!
e) Überlege: (1) Können durch ein und dieselbe Untersuchung zwei sich widersprechende Thesen gestützt werden? (2) Wird die Entscheidung klarer, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit auf 1% gesenkt wird? Formuliere hierzu wieder beide Entscheidungsregeln und entscheide!
f) Erläutere die Aussagekraft eines Stichprobenbeweises in eigenen Worten ("Testlogik"). Was kann durch eine Stichprobenuntersuchung nur erreicht werden? Und was sagt das vorliegende Untersuchungsergebnis über die Richtigkeit der beiden Hypothesen aus?
g) Nenne eine mögliche Ursache für die in weiten Teilen der Bevölkerung als Steigerung empfundene Aufzählung "Lüge - Betrug - Statistik"! Verliert die Mathematik hier ihre Exaktheit?

c) <u>Notiere für beide Hypothesen die Entscheidungsregel für n=50, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit α höchstens 5% (Risiko 1. Art) betragen soll.</u>

(1) Für H_1 sprechen viele, gegen H_1 wenige Depressive. D.h., H_1 wird bei wenigen gefundenen Depressiven (0 bis k_1) unter den 50 mathematisch gebildeten Testpersonen abgelehnt. Irrtümlich ist die Ablehnung, wenn der Depressiven-Anteil unter den mathematisch Gebildeten in Wirklichkeit doch der Behauptung des Professors entspricht, also mindestens 30% beträgt, und nur in der Stichprobe zufällig (zu) wenige Erkrankte enthalten sind. Die höchste Wahrscheinlichkeit (Wkt.) für diesen letztgenannten Fall erhält man, wenn die Behauptung des Professors nur gerade noch gilt, d.h. p=0,3 ist. Gäbe es nämlich in Wirklichkeit sogar mehr als 30% Depressive unter den Mathematikern (p>0,3), wäre es unwahrscheinlicher, dass trotzdem in einer zufälligen Stichprobe nur sehr wenige zu finden sind. Also wird in der Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten unter n=50 und p=0,3 nachgesehen, für welches k_1 noch $B(n;p;0..k_1) = B(50;0,3;0..k_1) \leq 5\%$ gilt. Man findet k_1=9. Also wird H_1 abgelehnt, wenn es in der Stichprobe nur 0..9 Depressive gibt, während 10..50 Depressive H_1 zu stützen scheinen (Annahmebereich 10..50: Dieses Ergebnis ist mit H_1 "verträglich" - s.u.).
(2) Da der Lehrinnenverband einen geringen Anteil von Depressiven behauptet, wird H_2 abgelehnt, wenn in der Stichprobe viele Depressive (nämlich k_2 bis 50) sind. Da $B(50;0,3;k_2..50) \leq 5\%$ nicht direkt der Tabelle zu entnehmen ist (Kumulation beginnt immer ‚links' bei k=0), wird statt dessen nachgesehen, wo die Gegenwkt. $B(50;0,3;0..K_2\text{-}1) \geq 95\%$ ist. Man findet k_2-1 = 15. Also darf H_2 erst bei 16..50 Depressiven abgelehnt werden; 0..15 Depressive sind mit H_2 verträglich.

d) <u>Von 50 Personen, die eine höhere Schulbildung in Mathematik erhalten hatten, waren 11 schon einmal depressiv. Dieses Stichproben-Ergebnis führt bei beiden Streit-Parteien zu Jubel! Warum?</u>

Die Zahl 11 liegt im Annahmebereich beider Hypothesen, scheint also jede Hypothese zu bestätigen -- was ihre Anhänger freut.

e) <u>Überlege: (1) Können durch ein und dieselbe Untersuchung zwei sich widersprechende Thesen gestützt werden? (2) Wird die Entscheidung klarer, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit auf 1% gesenkt wird? Formuliere hierzu wieder beide Entscheidungsregeln und entscheide!</u>

(1) Nein: Beide Hypothesen schließen sich gegenseitig aus, wie man sich leicht z.B. auf der Zahlengeraden klar macht. H_2: $p \leq 0,2$ und H_1: $0,3 \leq p$ sind immerhin durch einen 10 Prozentpunkte breiten Bereich voneinander getrennt und können daher nicht gleichzeitig wahr sein (wohl aber beide gleichzeitig falsch, wenn der wirkliche Anteil kranker Mathematiker zwischen 0,2 und 0,3 [ausschließlich] liegt).
Weil sie unmöglich beide gleichzeitig richtig sein können, können H_1 und H_2 natürlich nicht beide bewiesen werden -- erst recht nicht durch eine Untersuchung.
(2) Ein Verringern der Irrtumswkt. lässt sich nur durch Verkleinern der Ablehnungsbereiche erreichen -- die so genannten "Annahmebereiche" werden dadurch zwangsläufig noch größer und überlappen sich noch stärker, was die Entscheidung noch schwerer macht:
Für H_1: Ablehnung nur bei 0..7, "Annahme" also bei 8..50.
Für H_2: "Annahme" bei 0..17, Ablehnung bei 18..50.

Der Bereich von 8 bis 17 ist eine Grauzone, in der weder die eine noch die andere Hypothese abgelehnt werden kann -- obwohl wir wissen, dass höchstens eine wahr ist. Ein experimentelles Ergebnis im Bereich 8..17 heißt dann auch nicht, dass H_1 und H_2 wahr sind: die experimentellen Daten reichen nur noch nicht zu einer Entscheidung.

f) <u>Erläutere die Aussagekraft eines Stichprobenbeweises in eigenen Worten ("Testlogik"). Was kann durch eine Stichprobenuntersuchung nur erreicht werden? Und was sagt das vorliegende Untersuchungsergebnis über die Richtigkeit der beiden Hypothesen aus?</u>

Wie allgemein in der Wissenschaft können selbst viele positive Beispiele eine Hypothese nicht verifizieren. Beispielsweise vermag selbst das Vorführen hunderter mindestens vierrädriger Autos die Aussage "bei allen Autos gilt die Hypothese H: Radzahl $\geq$ 4" nicht zu beweisen. Ebenso wenig können positive Stichprobenergebnisse eine Hypothese wirklich beweisen. Hingegen reicht ein einziges Gegenbeispiel (z.B. ein Dreirad-Auto oder ein negativer Stichprobenausgang -- vgl. aber noch unten die Ausführungen zu g)), um zu zeigen, dass eine Hypothese falsch ist (Falsifikation). Eine Ablehnung hat daher Beweiskraft, eine "Annahme" hingegen nicht. Eine "Annahme" heißt nur, dass bisher noch nichts gegen die Hypothese spricht -- dies aber jederzeit noch kommen kann. Alle Gesetze der so genannten "exakten" Physik befinden sich in diesem Prüfstadium. Sie sind bisher nicht widerlegt -- aber auch nicht bewiesen und können niemals bewiesen werden. Selbst weithin geglaubte Gesetze, nach denen man längst erfolgreich Mondflüge geplant, Autos und Computer gebaut hat, könnten schon morgen durch ein neues Experiment widerlegt werden. Gerade in diesem Jahrhundert mussten z.B. viele Atomvorstellungen nach einigen Jahrzehnten "Annahme" plötzlich aufgegeben werden. Findet man ein Gegenbeispiel, scheitern natürlich nicht im Nachhinein die Raumflüge. Und deswegen fällt von den vorgeführten Autos auch nicht das vierte Rad ab, aber die Hypothese "H: Radzahl $\geq$ 4" kann dann eben nicht mehr als [allgemein-]gültig aufrecht erhalten werden.
Das hier vorliegende Untersuchungsergebnis k=11 zeigt daher nur, dass die experimentellen Daten noch nicht für eine Entscheidung reichen, es also noch unklar ist, ob eine / welche Hypothese richtig ist. Es muss noch weiter untersucht werden!

g) <u>Nenne eine mögliche Ursache für die in weiten Teilen der Bevölkerung als Steigerung empfundene Aufzählung "Lüge - Betrug - Statistik"! Verliert die Mathematik hier ihre Exaktheit?</u>

Behält man im Auge, was Wissenschaft wirklich kann, gibt es keine Probleme. Nur wenn man fälschlich "Noch unentschieden" für "beide richtig" hält, kommt man in Widersprüche. Leider trifft man im Alltag häufig auf solche Fehlinterpretationen von Ergebnissen, was allerdings nicht der Mathematik, sondern mangelndem Wissen -- oder gar böswilligem Spiel mit der Gutgläubigkeit uninformierter Laien -- anzulasten ist.
In der Stochastik ist zusätzlich zu beachten, dass selbst negative Stichprobenergebnisse keine völlig sichere Beweiskraft haben: ein negatives Stichprobenergebnis könnte auch durch bloßen Zufall entstanden sein, weil die Stichprobe einfach nicht

repräsentativ für die Gesamtheit ist/war (Fehler 1. Art). Die Wkt., dadurch eine in Wirklichkeit richtige Hypothese fälschlich abzulehnen, wird gerade mit der Irrtums-Wkt. exakt berechnet. Gilt in Wirklichkeit z.B. $p=0,25$, so darf man bekanntlich nicht erwarten, dass von 50 untersuchten Personen immer genau 12½ Menschen das interessierende Merkmal haben. Erstmal findet man zum Glück selten halbe Menschen. Und dann wissen wir alle, dass wegen zufälliger Schwankungen auch mal 11 oder 13, vielleicht auch 10 oder 16 der untersuchten Personen das Merkmal haben können. Der pure Zufall könnte sogar in einigen Fällen für 5, nur 3, oder beispielsweise gar 42 solcher Personen sorgen -- nur sind solche Extreme eben äußerst selten (d.h. unwahrscheinlich). Willkürlich wird daher eine Grenze festgesetzt (im Beispiel $\alpha \leq 5\%$). Hat der extreme Ausfall eine Wkt., die kleiner als die gesetzte Grenze ist, so will man nicht mehr an den (immer noch möglichen, aber eben unwahrscheinlichen) Zufall glauben, sondern vermutet als Ursache für den extremen Ausgang eine andere Wirklichkeit als sie von der Hypothese behauptet wird -- lehnt also die Hypothese ab.

Diese Zusammenhänge muss man sich bei der Interpretation der Ergebnisse und ihrer Würdigung stets vor Augen halten!

Robert Krell

Macho-Aufgabe in der Mathe-Klassenarbeit

Mo., 21.9.'98 Mathematik 13_1 (Kr)

<u>1. Klausur 13/I</u>

<u>Dauer:</u> 3 Schulstunden Name ____________________

<u>Hilfsmittel:</u> normaler Taschenrechner, 1 Blatt Binomialvtlg.-Tabelle (Auszug *))

5. Bekanntlich fordern ein Drittel aller Jungen schwerere Mathe-Klausuren. Bei einer Blitzumfrage unter 50 Mädchen waren nur 14 Mädchen für eine Verschärfung der Klausuren (28% der Befragten). Beweist dies bei höchstens 5% Irrtumswahrscheinlichkeit den "kleinen Unterschied" bezüglich der Mathe-Anforderungen?

*) Diese Aufgabe war eine von sechs Aufgaben der Klausur und trug mit 9 Punkten (8%) zur Gesamtpunktzahl 112 bei.

<u>Lösung</u>

Um den Unterschied zu beweisen, muss das Gegenteil, nämlich die Nullhypothese H_o ("Es gibt keinen Unterschied") abgelehnt werden. Wie bereits oben dargestellt (Artikel "Macht Mathe depressiv ?", Lösung zu f)), hat nämlich das Ablehnen Beweiskraft, während ein mit der Hypothese verträglicher Stichproben-Ausgang nicht deren Richtigkeit garantiert.

H_o : $p \geq \frac{1}{3}$ (Nullhypothese; lies: in Wirklichkeit will auch mindestens ein Drittel der Mädchen -- wie die Jungs -- schwerere Mathe-Aufgaben). Diese Hypothese H_o wird abgelehnt, wenn sich nur sehr wenige Mädchen (nur 0 bis k) in der Stichprobe für die Klausur-Verschärfung aussprechen. Die Wahrscheinlichkeit für irrtümliche Ablehnung -- weil tatsächlich gerade noch $p = \frac{1}{3}$ ist -- darf nur $B(50;\frac{1}{3};0..k) \leq 0{,}05$ sein. Laut Tabelle kann k maximal 10 sein.
H_o darf also nur abgelehnt werden, wenn höchstens 10 Mädchen für strengere Anforderungen sind -- in der Blitzumfrage waren es aber mehr, nämlich 14. Also kann H_o nicht abgelehnt und damit kann auf 95%-Signifikanzniveau auch kein Unterschied bewiesen werden.

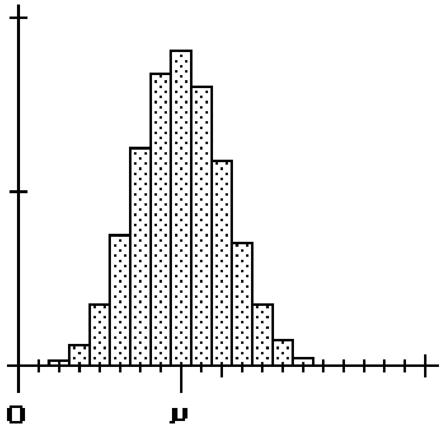
Wie schrieb ein Schüler, der sonst mit Text eher sparsam umgeht, am Schluss seiner Lösung in der Klausur: „Der Unterschied muss also woanders gesucht werden!“. Dem ist nichts hinzuzufügen.

Robert Krell

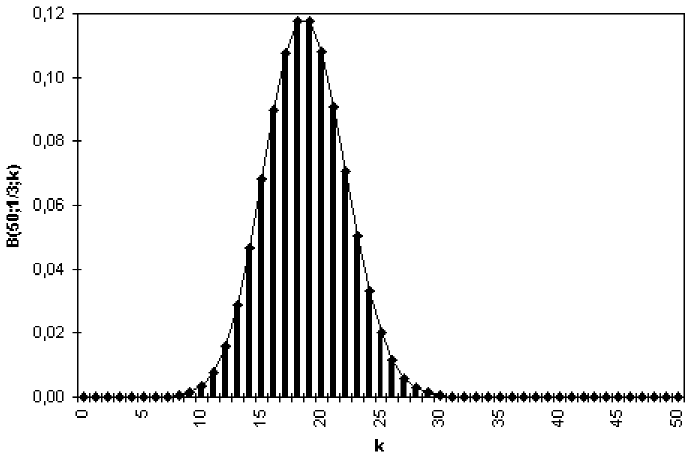
Von der Binomial- zur Normal-Verteilung
Ein Beispiel für sinnvollen Computereinsatz

Bei Aufgaben zur stichprobenhaften Qualitätskontrolle und bei Hypothesentests werden im Unterricht zunächst nur Werte für den Stichprobenumfang n und die behauptete Wahrscheinlichkeit p verwendet, für die die Bernoulli-Wkt. $B(n;p;0..k)$ tabelliert ist. Sicher taucht irgendwann die Frage auf, wie man in anderen Fällen an Werte kommt (wenn man nicht alle Einzelwahrscheinlichkeiten nach der Formel $B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ von Hand ausrechnen und aufaddieren will). Als typisches mathematisches Vorgehen liegt nahe, die tabellierten Beispiele einer näheren Betrachtung zu unterziehen, um vielleicht eine Regelhaftigkeit zu entdecken. Mit Hilfe einer Regel könnte dann auf weitere, nicht tabellierte Verteilungen geschlossen werden.

Weil Zahlenkolonnen unübersichtlich sind, mussten die Schülerinnen und Schüler mit den im Schulbuch abgedruckten Einzelwahrscheinlichkeits-Tabellen die Balkendiagramme für drei Verteilungen zeichnen -- z.B. für p=0,4 und n=10, 15 und 20. Sind prinzipielles Aussehen, Zeichentechnik und Bedeutung der Graphen klar, können weitere Beispiele per Computer beigesteuert werden. Dazu verwende ich gerne das Programm STOCHAST.EXE von H. J. Kayser, das 1991 einmal einem Heft von "Mathematik Betrifft uns" (MBU 1/91) aus dem Verlag Bergmoser+Höller beilag: Hier lässt sich entweder bei festem n das p schrittweise variieren oder umgekehrt. In beiden Fällen kann man leicht sehen, wie sich das Aussehen der immer neu gezeichneten Verteilungen ändert. Eine Verteilung ist hier abgebildet. (Später hat Kayser in MBU 3/94 eine Anweisungsfolge für Derive veröffentlicht, wie solche Verteilungen mit zusätzlichen Möglichkeiten gezeichnet werden können. Das beim Verlag ebenfalls noch erhältliche Heft mit Diskette und OH-Folien lohnt für Derive-Nutzer. Anfang Mai 1999 fanden sich Derive-Dateien von Kayser auch im Internet unter http://www.learn-line.nrw.de/Faecher/Mathematik/CAS/kayser3.htm).

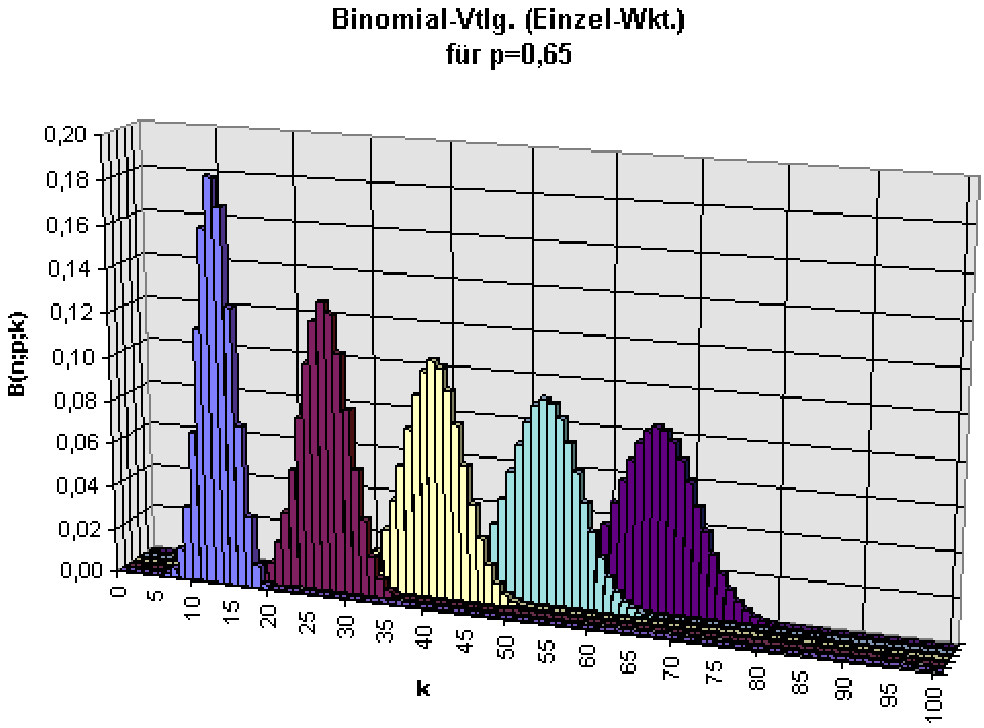


Aber auch ohne Spezial-Software sind solche Zeichnungen leicht möglich -- mit den ohnehin meist vorhandenen Tabellenkalkulationsprogrammen. Außerdem sind solche Programme vielen Schülerinnen und Schülern aus dem Mittelstufen-Informatikunterricht bekannt.
Im weitverbreiteten Excel 5.0 macht sogar eine schon eingebaute Funktion das mühsame Eingeben der Formel für $B(n;p;k)$ überflüssig: BinomVert($k;n;p$; falsch) steht für die Einzel-Wkt. $B(n;p;k)$ zur Verfügung, während BinomVert($k;n;p$;wahr) die Summen-Wkt. $B(n;p;0..k)$ liefert. Natürlich müssen statt n, p und k entweder konkrete Werte oder besser Zellbezüge zu konkreten Werten



eingetippt werden. Mit dem Diagrammassistenten lassen sich aus den schnell erzeugten Tabellen mühelos Graphen zeichnen - u.a. zeigt ein dem Balkendiagramm überlagerter Liniengraph (Bild links), dass eigentlich alle Verteilungen ziemlich symmetrische Glockenform haben und durch glatte Kurven angenähert werden können.

Weiterhin lohnt es, zum gleichen p (jetzt z.B. p=0,65) einmal die Verteilungen für verschiedene n zu zeichnen (im Bild von links nach rechts: n=20; n=40; n=60; n=80 und n=100).



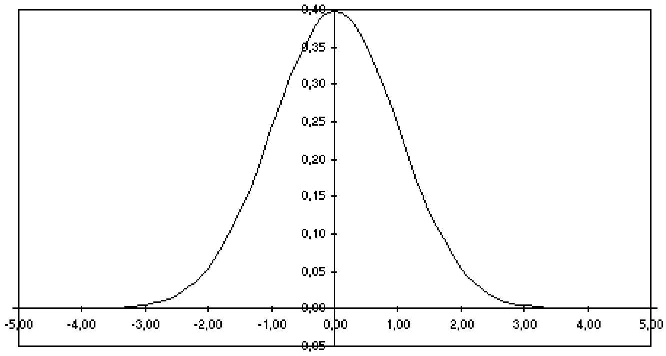
Zunächst erscheint es in Excel allerdings schwer, die Balken in den Diagrammen dicht an dicht zu stellen. Im Diagrammassistenten findet sich keine passende Wahlmöglichkeit. Hat man aber das Diagramm mit dem Assistenten erstellt (mit Zwischenraum zwischen den Balken), so klickt man ins Bild und in die Balkengraphik. Ist diese markiert, gibt‘s bei rechtem Mausklick im Kontextmenü den Punkt ‚(3D-)Säulengruppe formatieren..‘. Wird diese Möglichkeit gewählt, kann dann unter der Registerlasche ‚Optionen‘ der Abstand auf 0 gestellt werden -- und schon stoßen die Balken aneinander.

Auffällig ist, dass die "Gebirge" für zunehmendes *n* immer weiter nach rechts verschoben sind, und dabei immer breiter und flacher werden. Auch Grundkurs-Schülerinnen und -Schüler erkennen problemlos, dass trotzdem die Gesamtfläche unter jedem Graphen immer gleich eins (=100%) sein muss. Nach Betrachtung mehrerer ähnlicher Graphen mit variierten Parametern ist es nicht nur vorstellbar, sondern drängt sich fast auf, dass alle diese "Gebirge" durch Verschieben und

Flach- bzw. Breitklopfen eines ‚Urgebirges' entstanden sind bzw. entstehen können. Dieses ‚Urgebirge' wird Normalverteilung genannt und der Einfachheit halber mit dem Gipfel bei k=0 (bzw. x=0) symmetrisch zur y-Achse postuliert.

Um tatsächlich zu dieser Normalverteilung zu kommen, muss also das Verschieben und das Auseinanderfliesen rückgängig gemacht werden. Um diesen nicht nur hier, sondern auch im Unterricht durchaus zunächst sehr umgangssprachlich beschriebenen Vorgang quantifizieren zu können, müssen -- soweit nicht schon früher geschehen -- geeignete Kenngrößen eingeführt werden. Es ist rasch klar, dass bei jeder Binomialverteilungen der Gipfel immer bei $\mu = n \cdot p$, dem so genannten Erwartungswert, liegt. Ein Maß für die Breite ist schwieriger. Es ist aber einsichtig, dass ganz oben alle Gebirge immer die gleiche Breite (0 bzw. 1) haben und ganz unten eine vernünftige Messung auch nicht möglich ist, weil bei vier oder fünf Nachkommastellen die Wahrscheinlichkeiten irgendwann als 0 ausgegeben werden, obwohl das Gebirge streng genommen noch weiter geht.
Es muss also irgendwo in der Mitte gemessen werden. Willkürlich kann vorschlagen werden, etwa in ⅔ der Höhe die halbe Bergbreite zu messen und diesen Wert σ zu nennen.
Die Wahl von ⅔ erscheint etwas weniger willkürlich, wenn man dies damit begründet, dass sich dann im Intervall $[\mu\text{-}\sigma;\ \mu+\sigma]$ auch rund ⅔ der Gesamt-Wahrscheinlichkeit befindet (68%). Eventuell kann auch auf andere willkürliche Messvorschriften -- Halbwertsbreite bei optischen Spektrallinien, Messung in der Höhe $^1/_e$ in der Elektronik -- hingewiesen werden.
Ein Vergleich der an ausgedruckten Graphen gemessenen Werte mit der berechneten Zahl $\sqrt{n \cdot p \cdot q}$ liefert eine hinreichende Übereinstimmung, um künftig diese Wurzel als Maß für die Hügelbreite zu nehmen und als Standardabweichung σ zu bezeichnen.

Von der Binomial- zur Normalverteilung kommt man damit offenbar, indem man das Binomial-Gebirge um μ zurück, d.h. nach links verschiebt und es gleichzeitig schmaler macht. Da es um den Faktor σ auseinander gelaufen ist, wird jetzt durch σ geteilt, um es wieder auf die "Normalbreite" 1 zu bringen. Es wird also die Transformation von k zu $x = \frac{k-\mu}{\sigma}$ vorgenommen (bekannt als Transformation nach de Moivre und Laplace). Da bei dieser Verschmälerung Fläche verloren geht, muss auch schon deshalb die noch zu geringe Höhe korrigiert werden: Da jeder einzelne Streifen der ursprünglichen Binomialverteilung ein Rechteck war, ist einleuchtend, dass ein Dividieren der Breite durch σ nur durch ein Multiplizieren der Höhe mit dem gleichen Faktor ausgeglichen werden kann: nur dann bleibt die Fläche gleich: Man erhält so an jeder Stelle k bzw. x die neue Höhe $\varphi(x) = \sigma \cdot B(n;p;k)$. Entsprechende Berechnungen für x und φ lassen sich jetzt in der Excel-Tabelle der Binomialverteilung leicht machen und der Graph von



φ(x) zeichnen. Die aus verschiedenen Binomial-Verteilungen gewonnenen *φ(x)*-Graphen unterscheiden sich zum Glück nur sehrwenig und entsprechen[1]) alle dem schließlich auch noch eingezeichneten Graph zum Term

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} .$$

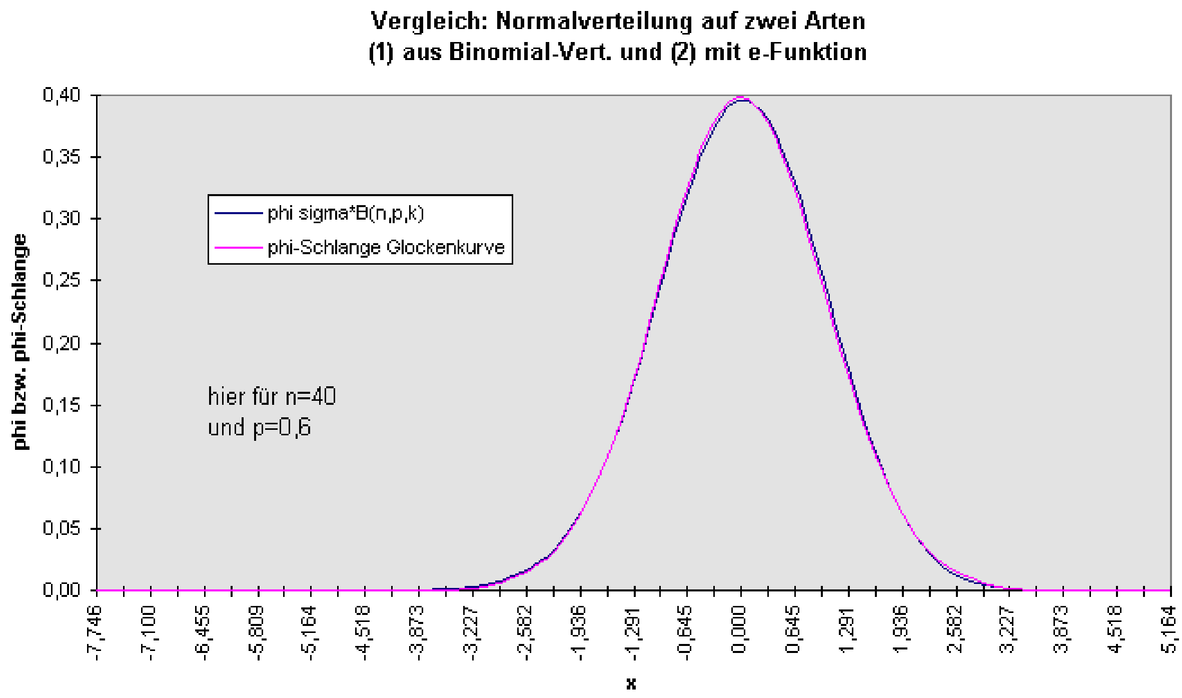
Die kompliziert wirkende Funktionsvorschrift wurde vom Lehrer genannt. Damit ist die gesuchte, allgemeingültige Normalverteilung als ‚Urform' aller Verteilungen gefunden. Damit haben wir die erhoffte Regelhaftigkeit erkannt und können nun beliebige, nicht tabellierte Binomialverteilungen durch Transformation auf die Normalverteilung ersetzen.

Für praktische Zwecke wie Hypothesentests oder Lieferungskontrollen sind allerdings die Einzelwahrscheinlichkeit $\tilde{\varphi}(x)$ bzw. *B(n;p;k)* weniger bedeutsam -- man braucht die Summenwahrscheinlichkeiten *Φ(x)* bzw. *B(n;p;0..k)*.

Wahrscheinlich kann man -- wie in meinem Unterricht -- für *Φ(x)* (das im Gegensatz zu $\tilde{\varphi}(x)$ übrigens in der Höhe nicht mehr verändert werden muss und darf,

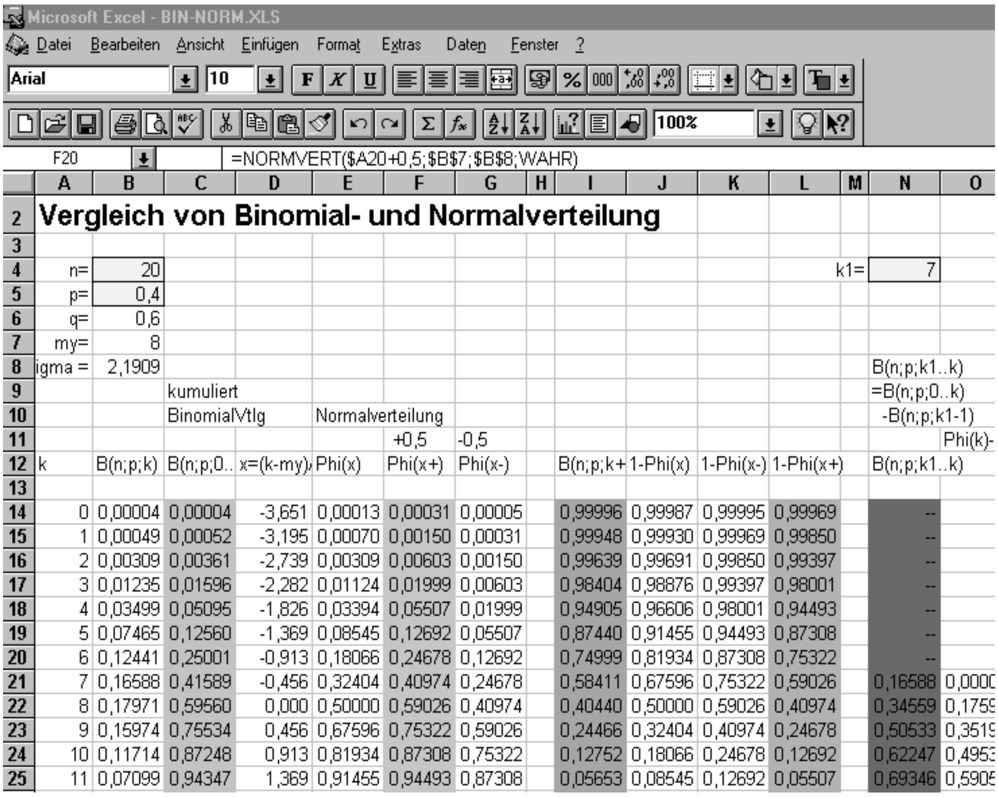
---

[1]) leider gibt es in Excel wohl keinen Weg, alle diese Graphen, deren Wertepaare (*x* | *φ(x)*) sich ja auch in der Variablen *x* unterscheiden, in ein gemeinsames Diagramm zu zeichnen. Es ist wohl möglich, jeweils aus einer Binomialverteilung die Transformationen (*x* | *φ(x)*) und zu den gleichen *x* noch die Normalfunktionswerte $\tilde{\varphi}(x)$ auszurechnen und so jeweils zwei Graphen (die sich kaum unterscheiden) in einem Diagramm darzustellen:



Oder alle Wertepaare werden in ein Mathe-Programm exportiert, wo sie als ("Messwerte-")Punkte zusätzlich zum Normalverteilungsgraphen eingezeichnet wurden. Die (leider relativ dick dargestellten) Punkte liegen dann alle auf dem Normalgraphen.

um zur Summenwahrscheinlichkeit zu werden -- insgesamt wird ja genau der Wert 1 erreicht) auf eine Tabelle im Buch verweisen. Diese eine Tabelle ersetzt nicht nur (für hinreichend große n wegen der dann kaum störenden Glättung des jetzt aus vielen Stufen bestehenden Graphen und für nicht allzu extreme p, bei denen Asymmetrien am Rand auftreten würden) alle anderen Binomialtabellen, sondern auch noch unendlich viele nicht abgedruckte weitere denkbare Tabellen! Allerdings werden auch nur Näherungswerte geliefert, die nicht immer ganz so gut wie die exakten Werte der Binomialverteilung sind.



Microsoft Excel - BIN-NORM.XLS

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster ?

Arial 10 100%

F20 =NORMVERT($A20+0,5;$B$7;$B$8;WAHR)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
2	Vergleich von Binomial- und Normalverteilung														
3															
4	n=	20											k1=	7	
5	p=	0,4													
6	q=	0,6													
7	my=	8													
8	igma =	2,1909												B(n;p;k1..k)	
9			kumuliert											=B(n;p;0..k)	
10			BinomialVtlg		Normalverteilung									-B(n;p;k1-1)	
11						+0,5	-0,5								Phi(k)-
12	k	B(n;p;k)	B(n;p;0..	x=(k-my)/	Phi(x)	Phi(x+)	Phi(x-)		B(n;p;k+	1-Phi(x)	1-Phi(x-)	1-Phi(x+)		B(n;p;k1..k)	
13															
14	0	0,00004	0,00004	-3,651	0,00013	0,00031	0,00005		0,99996	0,99987	0,99995	0,99969		--	
15	1	0,00049	0,00052	-3,195	0,00070	0,00150	0,00031		0,99948	0,99930	0,99969	0,99850		--	
16	2	0,00309	0,00361	-2,739	0,00309	0,00603	0,00150		0,99639	0,99691	0,99850	0,99397		--	
17	3	0,01235	0,01596	-2,282	0,01124	0,01999	0,00603		0,98404	0,98876	0,99397	0,98001		--	
18	4	0,03499	0,05095	-1,826	0,03394	0,05507	0,01999		0,94905	0,96606	0,98001	0,94493		--	
19	5	0,07465	0,12560	-1,369	0,08545	0,12692	0,05507		0,87440	0,91455	0,94493	0,87308		--	
20	6	0,12441	0,25001	-0,913	0,18066	0,24678	0,12692		0,74999	0,81934	0,87308	0,75322		--	
21	7	0,16588	0,41589	-0,456	0,32404	0,40974	0,24678		0,58411	0,67596	0,75322	0,59026		0,16588	0,0000
22	8	0,17971	0,59560	0,000	0,50000	0,59026	0,40974		0,40440	0,50000	0,59026	0,40974		0,34559	0,1759
23	9	0,15974	0,75534	0,456	0,67596	0,75322	0,59026		0,24466	0,32404	0,40974	0,24678		0,50533	0,3519
24	10	0,11714	0,87248	0,913	0,81934	0,87308	0,75322		0,12752	0,18066	0,24678	0,12692		0,62247	0,4953
25	11	0,07099	0,94347	1,369	0,91455	0,94493	0,87308		0,05653	0,08545	0,12692	0,05507		0,69346	0,5905

Auch mit Excel lässt sich eine Tabelle der kumulierten Normalverteilung *Φ(x)* erstellen, nämlich mit NormVert($k;\mu;\sigma$;wahr). Als Argument wird hier allerdings nicht x benutzt, sondern müssen jeweils k, μ und σ angegeben werden: die Transformation $x = \frac{k-\mu}{\sigma}$ macht das Programm dann selbst. Den Erwartungswert $\mu = n{\cdot}p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ (wobei $q = 1 - p$ die Gegenwahrscheinlichkeit zu p ist) muss der Anwender entweder selbst vorher ausrechnen oder durch die Eingabe der genannten Formeln im Arbeitsblatt ausrechnen lassen.

Druckt man zu gleichen Versuchsbedingungen einmal die mit BinomVert ermittelten genauen Werte und die mit NormVert ermittelten Näherungswerte aus, so fällt auf, dass die Näherungen im Bereich kleiner Prozentsummen (bis etwa 10..20%) im Allgemeinen nicht so gut sind und dass die Näherungswerte insgesamt eher zu klein ausfallen. Es erwies sich als besser, mit der Transformation $\tilde{x} = \frac{k-\mu+0{,}5}{\sigma}$ zu arbeiten, die man durch den Aufruf von NormVert(k+0,5 ;μ ;σ; wahr) erhält. In meinen Versuchen hat sich diese Näherung auch bewährt, wenn die Gegenwahrscheinlichkeit $B(n;p;k{+}1..n) = 1 - B(n;p;0..k)$ ausgerechnet werden sollte: auch hier überzeugte 1-NormVert(k+0,5;μ;σ ;wahr) eher. Und auch bei der Berechnung für $B(n;p;k1..k2)$ lieferte die neue Transformation bessere Werte. Während die k nur diskrete Werte, nämlich natürliche Zahlen (einschließlich 0) annehmen können, lassen sich die reellen x kontinuierlich verändern. Statt von k zu k+1 zu springen, sollte das x daher offenbar besser aus der Mitte, nämlich für k+0,5 gewählt werden (vgl. auch Lösung b) im nachfolgenden Artikel „TV-Talkshow-Exhibitionismus ausgerechnet“).

Der Einsatz von Excel hat sich bei mir im Unterricht gelohnt: Weil mehrere Schülerinnen und Schüler Vorerfahrungen mit Kalkulationsprogrammen mitbrachten, konnten im Computerraum in kleinen Gruppen in von mir vorbereiteten Excel-Arbeitsblättern n und p verändert und die Auswirkungen studiert werden. Dies dauerte etwa eine Viertelstunde. Die Idee der Transformation wurde so anschaulich klar und das nachfolgende Vorgehen motiviert. Nach der wieder im normalen Klassenraum entwickelten mathematischen Beschreibung der Transformation reichte eine kurze zentrale Vorführung der jeweils aus verschiedenen Daten erhaltenen, aber offensichtlich gleichen $\varphi(x)$-Graphen, um alle davon zu überzeugen, dass es nur eine Normalverteilung gibt und sich offenbar alle Binomialverteilungen auf eine Regel bzw. diese eine ‚Urform‘ $\tilde{\varphi}$ zurückführen lassen.

Für mich selbst war der (im Unterricht erst später eingebrachte) Vergleich von Binomial- und Normalverteilung überraschend, hatte ich doch vor Jahren durch punktuelle Rechnungen mit dem Taschenrechner den Vorteil der Transformation $\tilde{x} = \frac{k-\mu+0,5}{\sigma}$ für die Summenwahrscheinlichkeit nicht eingesehen.

Abschließend bleibt noch anzumerken, dass die Excel-Funktion NormVert(k+0,5;μ;σ; falsch) nicht die oben erwähnte Funktion $\tilde{\varphi}$, sondern die auch auf dem (bis 2001 gebräuchlichen) Zehnmark-Schein angegebene Gauß-Funktion f:

$f(x) = \dfrac{\tilde{\varphi}(x)}{\sigma} \approx B(n;p;k)$ berechnet (nachsehen, bevor €uro-Scheine kommen!) -- "wahr" und "falsch" stehen in Excel jeweils für kumuliert oder nicht-kumuliert bzw. Summen- respektive Einzelwahrscheinlichkeit. Für Hypothesentests und Qualitätskontrollen ist außerdem noch die Funktion KritBinom(n;p;α) verfügbar, die zur vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit α das größte k mit $B(n;p;0..k) \leq \alpha$ liefert und damit zum maximalen Ablehnungsbereich $0..k$ führt. k=KritBi-nom(n;p;α) ist die höchste Anzahl defekter Teile, die bei einer Qualitätskontrolle (Stichprobenumfang n) noch akzeptiert wird, wenn p die Wahrscheinlichkeit für ein funktionsfähiges Teil und α die Irrtumswahrscheinlichkeit ist.

Robert Krell

TV-Talkshow-Exhibitionismus ausgerechnet

Noch eine Klausuraufgabe -- diesmal aus meiner 2. Klausur im Mathe-Grundkurs 13/I. Die Aufgabe war eine von 5 Aufgaben der Klausur (Dauer 3 Schulstunden), es konnten damit 33 von insgesamt 191 Punkten erreicht werden (17,2%).

Mo., 14.12.'98 Mathematik 13_1 (Kr)
2. Klausur 13/I
Dauer: 3 Schulstunden Name ______________________
Hilfsmittel: normaler Taschenrechner, beigefügte Tabellen (Auszug)

5. Erfahrungsgemäß sind nur 3% aller Menschen bereit, sich vor laufender Kamera über ihr Sexualleben zu äußern. Die Veranstalter von Talkshows hoffen hingegen auf Bekenntnisse aus dem Publikum.
   a) *n-Bestimmung ohne Tabelle:* Wie viele Leute müssen als Publikum eingeladen werden, damit sich mit 99-prozentiger Wkt. mindestens ein Gast über sein Intimleben äußert? (Tipp: Gegenwkt. beachten und an Baum denken. Bekanntlich ist $\log_a b = \log_{10} b \;/\; \log_{10} a$)
   b) *n-Bestimmung mit der Normalverteilungstabelle:* Wie viele Leute müssen eingeladen werden, damit mit einer Wkt. $\geq$ 90% mindestens 10 Leute bereit sind, über ihr Sexualleben zu berichten? (Tipp: Ersetze $\sqrt{n}$ durch z, um die quadrat. Gleichung zu lösen!).

Lösungen:

```
┬──3/100-exh┬──3/100-exh┬──3/100-exh
│           │           └─97/100-"_"
│           └─97/100-"_"┬──3/100-exh
│                       └─97/100-"_"
└─97/100-"_"┬──3/100-exh┬──3/100-exh
            │           └─97/100-"_"
            └─97/100-"_"┬──3/100-exh
                        └─97/100-"_"
```

1. Betrachtet man einen Baum, so fällt auf, dass in allen Ästen (Pfaden) mindestens ein Exhibitionist ('exh') ist, ausser im untersten Ast, wo alle Menschen schweigen ("_") -- und zwar jeweils mit der Wkt. 0,97 schweigen. Da sich mit einem einzigem Ast die Gegenwkt. < 1% = 0,01 leichter berechnen lässt, als die Summe aller oberen Äste (die zusammen $\geq$ 99% sein müssten) , führt dies zum Ansatz

$$0{,}97^n < 0{,}01$$

wobei n die Anzahl der Versuche ist. Logarithmieren führt zu

$$n > \log_{0,97}(0{,}01) = \frac{\log_{10}(0{,}01)}{\log_{10}(0{,}97)} = \frac{-2}{-0{,}0132} = 151{,}2$$

(vgl. Tipp), woraus sich ergibt, dass mindestens 152 Gäste zur Talkshow a) eingeladen werden müssen.

2. Hier soll die Bernoulli-Summenwahrscheinlichkeit *B(n; 0,03; 10..n)* $\geq$ 0,9 sein, wobei n gesucht ist. Da im Buch wenige Tabellen abgedruckt sind und auch mit der letzten Tabelle für n=100 die Bedingung nicht erfüllt werden kann, muss näherungsweise die Normalverteilung benutzt werden. In der entsprechenden Summen-Tabelle findet man für $\Phi(x) \geq 0{,}9$ wegen $\Phi(1{,}28) = 0{,}8997$ und $\Phi(1{,}29) = 0{,}9015 \geq 0{,}9$ den Wert x=1,29.
Nach den Transformationsregeln von de Moivre und Laplace ist aber

$$(*) \quad x = \frac{\mu - k}{\sigma} = \frac{np - k}{\sqrt{npq}}\,.$$

Durch Einsetzen der bekannten Werte ergibt sich daraus

$$(**) \quad 1{,}29 = \frac{n \cdot 0{,}03 - 10}{\sqrt{n \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97}} = \frac{0{,}03n - 10}{0{,}1706\sqrt{n}}$$

und nach beidseitiger Multiplikation mit dem Nenner schließlich

$$0{,}2201\sqrt{n} = 0{,}03n - 10\,,$$

woraus nach Umordnen und der Substitution $z = \sqrt{n}$ die quadratische Gleichung

$$0{,}03\,z^2 - 0{,}2201\,z - 10 = 0$$

entsteht, die z.B. nach Normieren mit der p-q-Formel zu

$$z = 22{,}29 \quad \vee \quad z = -14{,}96$$

gelöst werden kann. Nur für die positive Lösung ist die Rück-Substitution $\sqrt{n} = 22{,}29$ sinnvoll, was zu $n = 22{,}29^2 = 496{,}4$ führt, bzw. -- weil ja nur natürliche n in Frage kommen und ursprünglich ein Mindestwert gesucht war -- zum Ergebnis $n \geq 497$.

Bei genauerem Hinsehen zeigt sich allerdings, dass die Rechnung noch verbessert werden kann. Bei der verwendeten Transformationsformel (*) und dem daraus abgeleiteten Ansatz (**) war nicht berücksichtigt worden, dass bei der Binomialverteilung mehrere diskrete Streifen der Breite 1 addiert werden, während die Normal-Vtlg. kontinuierlich ist. Die Grenze zwischen dem Streifen 9 und dem Streifen 10 wird statt bei 10 besser bei 9,5 angesetzt. Damit ergibt sich an Stelle von (**) der verbesserte Ansatz

$$(***) \qquad 1{,}29 = \frac{0{,}03n - 9{,}5}{0{,}1706\sqrt{n}} \quad ,$$

der mit analogem Lösungsweg wie oben schließlich zu $n \geq 477$ führt. Dies bedeutet immerhin 20 Gäste weniger, als zuvor ausgerechnet.
Dieses „$n \geq 477$“ ist das beste Ergebnis, das man im Unterricht üblicherweise erhalten kann, und galt als korrekte Lösung in meiner Klausur (tatsächlich habe hierfür sogar Sonderpunkte vergeben und mich sonst mit dem ungenaueren $n \geq 497$ begnügt).

Mit dem bereits in meinem Beitrag „Von der Binomial- zur Normal-Verteilung -- Ein Beispiel für sinnvollen Computereinsatz“ vorgestellten Programm Excel 5.0 können leicht weitere Werte von n überprüft werden. Vertraut man dem Programm, so würde es sogar reichen, 470 Gäste einzuladen, wenn man mit mindestens 90%-iger Wkt. mindestens 10 Exhibitionisten darunter haben will (oder mit höchstens 10%-iger Wkt. höchstens 9 Exhibitionisten, wie mit dem Computer berechnet[2])). Der Unterschied zur oben berechneten Mindestzahl 477 ergibt sich vermutlich daraus, dass schon der Tabellenwert x=1,29 geringfügig zu groß war. Auch mit einem etwas kleineren x hätte die 90%-Marke gerade schon überschritten werden können. Bei einem $\sigma \approx \sqrt{41}$ ist jedenfalls das übliche Kriterium für eine gute Näherung längst erfüllt.

MUED-RB.XLS

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n=	***470***		430	431	470	471	510	511
2	p=	***0,03***		0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
3	alpha=	***0,1***		0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
4									
5	k=	**9**		8	9	9	10	10	11
6	B5:=KRITBINOM(B1;B2;B3)								
7									
8	Lösung zu "TV-Talkshow-Exhibitionismus ausgerechnet",								
9	Teil b), aus dem MUED-Rundbrief Nr. 126 (2-99), Seite 22								

Tabelle1 / Tabelle2 / Tabelle3 / Tabelle4 / Tabelle5

Das Vertrauen in Excel ist allerdings nicht ganz gerechtfertigt, auch wenn die Lösung besser ist, als das von Hand gewonnene Ergebnis: MatheAss und Derive liefern beide eine etwas andere Zahl (wobei Derive ja exakt rechnet): Bei 470 Gästen ist die Wkt. $B(470; 0{,}03; 10..470) = 89{,}877\%$ noch etwas zu klein, erst bei n=471 ist mit $B(471; 0{,}03; 10..471) = 90{,}011\%$ die in der Aufgabe gestellte Bedingung erfüllt. Für die Talkshow b) müssten also mindestens 471 Gäste eingeladen werden.

---

[2]) Die Excel-Funktion KritBinom, die wie in der Tabellenzeile 6 erläutert, in Zelle B5 (und mit entsprechend veränderten Argumenten auch in den Zellen D5 bis I5) als Formel eingetragen ist, berechnet mit k=KritBinom($n;p;\alpha$) das größte k, für das die Bernoulli-Summen-Wkt. $B(n;\ p;\ 0..k) \le \alpha$ ist.

Robert Krell

Gegen das Zentralabitur

Die MUED hat sich realitäts- und anwendungsbezogener Mathematik verschrieben. Weiterhin wird in der MUED schon lange multikulturelle Integration nicht nur gefordert, sondern auch gefördert; für das mädchenfreundlichste Mathe-Buch wird alljährlich ein Preis überreicht. Nicht nur im Unterrichtsgespräch, bei adhoc-Beispielen, in Aufgaben und Arbeitsblättern gilt es, durch scheinbare (aber in der Summe wohl wichtige) Kleinigkeiten traditionelle Klischees zu überwinden -- auch in Abituraufgaben sollte dies selbstverständlich sein. So begann schon vor Jahren eine meiner Stochastikaufgaben mit folgendem Satz:

> Um die Wartezeit zwischen Abitur und Ausbildung bzw. Studium zu überbrücken, gründen Mirjana, Uschi und Sebnem eine Firma für den Handel mit Party- und Geschenkartikeln.
>
> a) Jeweils zwei der Firmengründerinnen sind zeichnungsberechtigt. Zähle ...
>
> b) Auf drei gleichartige Hilfskraftstellen haben sich 10 ehemalige Mitschüler beworben, 6 Jungen und 4 Mädchen. Wie viele ...
>
> [....]

Im Zentralabitur habe ich so etwas noch nie gesehen -- mal ganz davon abgesehen, dass z.B. im Unterrichtsfach Informatik zentral der Stand von vor 20 Jahren festgeschrieben ist. Erziehung zur Selbstständigkeit durch zentralisierte Lehre(r)?

(Ende)

Anschrift des Verfassers siehe Seite 2