Mi., 14.12.2011 Mathematik M 13 G2 (Bo/Kr)

<u>2. Klausur 13/I</u> (A)

<u>Dauer:</u> 3 Schulstunden Name: __www.r-krell.de___

<u>Hilfsmittel:</u> normaler Taschenrechner

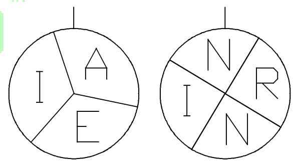
* *Achte auf sorgfältige Darstellung mit vollständigem, nachvollziehbarem Lösungsweg!* *

① Ergebnis und Ereignisse

a) Beim einmaligen Würfeln ist das Ergebnis eine Zahl von 1 bis 6, d.h. die Ergebnismenge ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Nenne jeweils als Menge mit Angabe aller Elemente die Ereignisse

- a1) A: die gewürfelte Zahl ist gerade
- a2) B: die gewürfelte Zahl ist durch 3 teilbar
- a3) C: die gewürfelte Zahl ist einstellig
- a4) D: die gewürfelte Zahl ist dreistellig
- a5) Notiere, welche der Ereignisse A bis D als „unmögliches Ereignis“ oder als „sicheres Ereignis“ bezeichnet werden können.
- a6) Erläutere, wie hier leicht die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses ermittelt werden kann und gib P(A), P(B), P(C) und P(D) an!

b) Zwei Glücksräder werden nacheinander gedreht und aus den beiden nachher oben stehenden Buchstaben wird ein Wort gebildet – im gezeigten Beispiel wurde das Wort AN erhalten.



- b1) Gib die Ergebnismenge Ω an (jedes Wort nur einmal!)
- b2) Nenne das Ereignis S aller sinnvollen deutschen Wörter
- b3) Nenne das Ereignis G aller Wörter, die aus zwei gleichen Buchstaben bestehen
- b4) Nenne das Ereignis Z aller Wörter, die auf Z enden
- b5) Erläutere, ob alle Ergebnisse in b1) die gleiche Wahrscheinlichkeit haben und erkläre eventuelle Abweichungen. Notiere, ob „Wörter-Drehen“ ein Laplace-Versuch ist und gib die Auswirkung auf die Berechnung der Ereignis-Wahrscheinlichkeit P(G) an.

② Baum und Vierfeldertafel

In eine Urne liegen 5 Holz- und 9 Plastikkugeln gleicher Größe. Von den Holzkugeln sind zwei rot und drei weiß, von den Plastikkugeln sind 4 rot und 5 weiß. Es wird eine Kugel zufällig gezogen. Dabei sei H das Ereignis „die gezogene Kugel ist aus Holz“ und R das Ereignis „die Kugel ist rot“.

a) Zeichne einen Baum mit zwei Stufen/vier Pfaden (unterscheide die Stufen nach Material und Farbe), beschrifte mit allen Wahrscheinlichkeiten und berechne alle Pfad-Wkt.! Bestimme außerdem die Wkt. P(R) für rot (ohne Rücksicht auf das Material).

b) Notiere für die Kugeln jeweils die Vierfeldertafel (Vorschlag: R oben, H an der Seite), wobei

- b1) in den Feldern Kugelzahlen stehen sollen
- b2) in den Feldern Wahrscheinlichkeiten stehen sollen

Berechne außerdem einmal $P_H(R)$, $P_H(\overline{R})$, $P_{\overline{H}}(R)$ und $P_{\overline{H}}(\overline{R})$!

c) Ermittle (mit a) oder b)) die Wahrscheinlichkeit, dass zufällig

- c1) eine weiße Kugel
- c2) eine Holzkugel
- c3) eine rote Plastikkugel

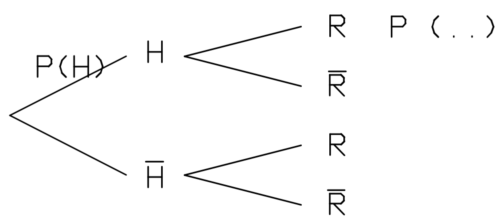
gezogen wird. Notiere in allen Fällen außer dem Ergebnis die korrekte Bezeichnung P..(..)!

d) Nenne die Wkt., dass es sich bei einer roten gezogenen Kugel um eine Holzkugel handelt. Gib auch hier die richtige Schreibweise der Wkt. sowie die Regel von Bayes mit den richtigen Buchstaben an!

e) Gib die Definition an, wann zwei Ereignisse H und R „stochastisch unabhängig“ heißen und überprüfe, ob Material und Farbe hier unabhängig sind.

f) Fülle in der allgemeinen Vierfeldertafel (siehe nächste Seite) alle Felder mit den passenden Bezeichnungen aus und notiere -- z.B. nach Vergleich von b2) mit a) -- auch für den Baum alle zehn allgemeinen Wahrscheinlichkeits-Bezeichnungen (eine bereits gegeben) (entweder hier auf der nächsten Seite oder in deinem Heft/auf deinem Klausurbogen)

	R	$\overline{R}$	
H	$P(R \cap H)$		$P(H)$
$\overline{H}$			
			1



3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

a) Beim einfachen Würfeln interessieren die Ereignisse A = {2, 3, 4} und B = {1, 3, 5, 6}. Stelle eine Vierfeldertafel auf, berechne $P_A(B)$ und $P_B(A)$ und ermittle, ob die Ereignisse abhängig sind oder nicht.

b) An einem Preisschießen nehmen 213 Schützen teil. Jeder Teilnehmer darf genau einmal schießen. 45 Schützen haben bereits vorher Alkohol getrunken („Zielwasser"), 11 davon treffen ins Schwarze. Insgesamt treffen 72 Schützen das Schwarze.
- b1) Zeichne und beschrifte entweder einen Baum oder eine Vierfeldertafel
- b2) Bestimme die Wkt., dass ein beliebig ausgewählter Schütze das Schwarze trifft
- b3) Ein Schütze hat das Schwarze getroffen. Ermittle die Wkt., dass er getrunken hatte
- b4) Ein Schütze hat nicht getroffen. Mit welcher Wkt. ist er nüchtern?
- b5) Untersuche, ob Alkoholkonsum und Treffsicherheit abhängig sind. Wer trifft besser?

c) Ein Fahrkartenautomat prüft eingelegte Geldscheine. Aus Erfahrung weiß man, dass 0,8% der eingeschobenen Geldscheine gefälscht sind. Das Gerät weist mit einer Wkt. von 98,5 % einen falschen Schein zurück, spuckt aber auch 2% der echten Scheine irrtümlich wieder aus.
- c1) Zeichne und beschrifte entweder einen Baum oder eine Vierfeldertafel (bitte mit allen Nachkommastellen exakt beschriften; hier noch nicht runden!)
- c2) Nenne die Wkt., dass der Automat den nächsten Schein annimmt.
- c3) Nenne die Wkt., dass ein vom Automaten ausgespuckter Schein tatsächlich falsch ist
- c4) Den Automatenbetreiber interessiert, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein angenommener Schein in Wirklichkeit falsch ist. Berechne diese Wkt.!
- c5) Erläutere anschaulich in Worten die Konsequenz für den Alltag, wenn die Ereignisse „Schein wird ausgespuckt" und „Schein ist gefälscht" unabhängig wären und überprüfe die (Un-)Abhängigkeit durch Rechnung!

d) Anna und Bernd sind selten zu Hause. Für die Ereignissen A = „Anna zu Hause" und B = „Bernd zu Hause" gelten die Wkt. $P_B(A) = 0{,}01;\ P_{\overline{B}}(A) = 0{,}85\ \mathit{und}\ \ P(B) = 0{,}6$.
- d1) Zeichne und beschrifte entweder einen Baum oder eine Vierfeldertafel exakt
- d2) Bestimme die Wkt. dafür, dass (1) Anna zu Hause ist, (2) weder Anna noch Bernd zu Hause sind, (3) entweder Anna oder Bernd zu Hause sind (aber nicht beide gleichzeitig!), (4) Anna und Bernd zu Hause zusammen treffen.

e) Eine Ladenkette verkauft Marzipankugeln in zwei unterschiedlichen Packungen I und II. Die Marktforscher interessiert, ob die Wahl der Packung vom Geschlecht des Käufers/der Käuferin abhängig ist. Die Packung I macht 65% des Umsatzes aus; 30 % ihrer Käufer sind männlich. 64% der Käufer der Packung II sind weiblich.
- e1) Zeichne und beschrifte entweder einen Baum oder eine Vierfeldertafel exakt
- e2) Bestimme den Frauenanteil unter den Marzipankugelkäufer(inne)n
- e3) Jemand hat gerade eine Packung I genommen. Bestimme die Wkt., dass diese Person weiblich ist.
- e4) Eine Frau verlässt den Laden mit einer Packung Marzipankugeln. Nenne die Wkt,, dass es sich dabei um eine Packung I handelt.
- e5) Prüfe, ob Packungswahl und Geschlecht unabhängig sind. Falls nicht, erläutere welche Kundengruppe eher zur Packung I greift.

f) Ein Mathelehrer weiß, dass sich 50% seiner Schülerinnen und Schüler gut, 30% einigermaßen und 20% gar nicht auf den nächsten Test vorbereiten. Der Test ist so angelegt, dass ihn alle, die gut vorbereitet sind, problemlos schaffen. Von den „einigermaßen" Vorbereiteten werden nur 50% bestehen und von den gar nicht Vorbereiten haben nur zu 10% Erfolg.
   f1) Zeichne und beschrifte entweder einen Baum oder eine Sechsfeldertafel (!)
   f2) Bestimme die Wkt., dass ein zufällig herausgegriffener Test-Teilnehmer
      (1) die Anforderungen des Tests erfüllt
      (2) gar nicht vorbereitet war, obwohl er den Test erfolgreich bestanden hat.

4 Simpson-Paradoxon

Eine Firma möchte in einer neu eröffneten Filiale 6 Abteilungsleiterposten und 60 Sachbearbeiterstellen besetzen. Auf die sechs Abteilungsleiterposten bewerben sich 80 Frauen und 20 Männer – die Posten werden mit 5 Frauen und einem Mann besetzt. Auf die Sachbearbeiterstellen bewerben sich 120 Frauen und 180 Männer. Davon kriegen 25 der Frauen und 35 Männer schließlich eine Zusage. Niemand hatte sich doppelt beworben. (Für die folgenden Rechnung muss nicht unbedingt eine 4-Felder-Tafel oder ein Baum aufgeschrieben werden; es geht schneller direkt!)

a) Betrachte zunächst nur die Abteilungsleiterposten. Ermittle für beide Geschlechter getrennt die Wkt., dass ein Bewerber von diesem Geschlecht den angestrebten Abteilungsleiterposten wirklich erhält. Beantworte dann, welches Geschlecht bessere Chancen hatte.
b) Betrachte nun nur die Sachbearbeiterstellen. Ermittle wieder für beide Geschlechter getrennt die Wkt., dass ein Bewerber tatsächlich die angestrebte Sachbearbeiterstelle erhält. Beantworte nach der Rechnung auch hier, welches Geschlecht bessere Chancen hatte.
c) Jetzt soll die Einstellungspraxis der Firma als Ganzes untersucht werden: Alle 66 Stellen werden dazu in ‚in einen Topf geworfen', d.h. nicht mehr nach der Aufgabe unterschieden. Ermittle wieder für beide Geschlechter die Wkt., dass ein Bewerber für irgendeine Stelle der neuen Filiale tatsächlich die angestrebte Stelle erhält. Beantworte wieder die Frage, welches Geschlecht insgesamt die besseren Chancen hatte.
   Vergleiche die letzte Antwort auch mit a) und b) und notiere, ob das zu erwarten war. Gib -- falls möglich -- eine Erklärung für das paradoxe Ergebnis!